

2. Caratterizzazione di R_m .

Possiamo limitarci a supporre che sia $(a_n)_n$ decrescente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

Costruiamo delle partizioni di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ via via più fini nel modo seguente.

Sia

$$N_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A\} \quad \text{ed} \quad N_0 = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - N_1$$

Successivamente definiamo:

$$N_{11} = \{A \in N_1 : 2 \in A\}, \quad N_{10} = \{A \in N_1 : 2 \notin A\}$$

$$N_{01} = \{A \in N_0 : 2 \in A\}, \quad N_{00} = \{A \in N_0 : 2 \notin A\}$$

Al passo n-mo ogni $N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ con $\alpha_k \in \{0,1\}$ verrà suddiviso in:

$$N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 1} = \{A \in N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} : n+1 \in A\}$$

$$N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 0} = \{A \in N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} : n+1 \notin A\}$$

Posto $A^1 = A$ e $A^0 = \mathbb{N} - A$ si ha:

$$N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \{A \subseteq \mathbb{N} : k \in A^{\alpha_k} \text{ per } k = 1, 2, \dots, n\}$$

Risulta evidentemente

$$A \in N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \implies \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \leq m(A) \leq 1 - \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) a_k ;$$

pertanto posto

$$I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n = \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k, 1 - \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) a_k \right]$$

vale l'inclusione

$$m(N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}) \subset I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n$$

e gli estremi dell'intervallo chiuso $I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n$ appartengono ad $m(N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n})$.

Poiché risulta, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato,

$$\mathcal{B}(\mathbb{N}) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} N_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$$

si ha

$$(1) \quad R_m = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} I_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n$$

dove l'unione è estesa a tutte le $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$ corrispondenti all' n fissato.

La (1) vale per ogni n , pertanto se indichiamo con P_n tale unione, si ha

$$(2) \quad R_m \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n = P.$$

Osservato che, per costruzione

$$I_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{n+1} \cup I_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 1}^{n+1} \subset I_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^n$$

si ha che $(P_n)_n$ è una successione di pluriintervalli chiusi e decrescenti.

Se $x \in P$ allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n : x \in I_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n$ e poiché gli estremi dell'intervallo sono elementi di R_m e l'ampiezza di $I_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n$ è $1 - \sum_{k=1}^n a_k$, si ha: per ogni $\epsilon > 0$, $\exists y \in R_m$ tale che $|x-y| < \epsilon$, cioè $x \in \bar{R}_m$ e quindi

$$(3) \quad P \subset \bar{R}_m.$$

Ma essendo m numerabilmente additiva sulla σ -algebra $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, R_m è chiuso (cfr. [1] e [2]) e quindi si ha il seguente

TEOREMA (2). $R_m = P$.

Si osservi che ogni plurintervallo P_n è simmetrico rispetto ad $\frac{1}{2}$ e contiene sia 0 che 1: R_m è il limite di una successione di pluriintervalli chiusi e decrescenti, formati da intervalli chiusi non degeneri.

Osserviamo che da

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

segue che

$$(4) \quad a_n < 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si possono distinguere le due seguenti alternative:

$$(5) \quad a_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 1 - (a_1 + \dots + a_n) \quad \text{e quindi}$$

$$(5)' \quad a_n > \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)$$

oppure

$$(6) \quad a_n \leq \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right).$$

La (4), valida sempre, ci dice che l'intervallo $I_{0\dots 01}^n$ ed il suo simmetrico $I_{11\dots 10}^n$ (non solo sono non vuoti ma) hanno la cardinalità del continuo.

La (5) ci dice che gli intervalli successivi $I_{00\dots 0}^n$ e $I_{00\dots 01}^n$ (ed i loro simmetrici rispetto a $\frac{1}{2}$) sono disgiunti.

Possiamo pertanto enunciare il seguente

TEOREMA (3).

- a) Se la (5) vale per almeno un n , R_m non è connesso e precisamente gli intervalli aperti $(1 - (a_1 + \dots + a_n), a_n)$ e $(1 - a_n, a_1 + \dots + a_n)$ hanno intersezione vuota con R_m
- b) Se la (5) vale solo per un numero finito di n , allora R_m è unione finita di intervalli chiusi
- c) Se la (5) vale per infiniti valori di n (non necessariamente tutti), allora R_m è un insieme tipo Cantor
- d) Se la (6) vale per ogni n allora $R_m = [0, 1]$.

Si osservi che nel caso d) si ha anche: $P_n = [0, 1]$ per ogni n .